Física para estudiantes de Ingeniería: Ondas Mecánicas

.UBAfiuba
FACULTAD DE INGENIERÍA

Índice

ONDAS MECÁNICAS

1_INTRODUCCIÓN

Cuando trabajamos con Sistema de Partículas hemos comenzado considerando sistemas *discretos*, es decir, sistemas tales que entre cada par de partículas existe una distancia finita.

Posteriormente, continuando con los Sistemas de Partículas, nos ocupamos de los sólidos rígidos, definidos como aquellos sistemas en los cuales la distancia entre las partículas que los componen se mantiene constante. Un sólido rígido es también, estrictamente hablando, un sistema discreto, dado que toda estructura material por su naturaleza atómica siempre será discreta. Sin embargo, a los efectos prácticos, hemos tratado los sólidos rígidos como si fueran medios *continuos*.

Un medio continuo se concibe como una porción de materia formada por un conjunto infinito de partículas entre las que no existen discontinuidades. Dichos medios son estudiados macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades que puedan presentar a nivel microscópico.

En consecuencia, en el tratamiento matemático ideal de un medio continuo se admite usualmente que no hay discontinuidades entre sus partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas. Por ello, cuando definimos el centro de masa y otras propiedades de los cuerpos rígidos transformamos las sumatorias de términos finitos, empleadas en los sistemas de partículas discretos, en integrales.

Ahora bien, para el estudio del movimiento ondulatorio no vamos a trabajar con sólidos rígidos, sino con *medios elásticos*.

Un medio elástico es deformable en forma proporcional a la intensidad de la acción que lo solicita. Si el sistema de partículas tiene propiedades elásticas, cuando se le aplican fuerzas se deforma proporcionalmente y una vez que cesa la aplicación de esta fuerza recupera su forma inicial.

Entre los medios elásticos podemos incluir los gases y algunos sólidos. Los líquidos se pueden considerar también pero ese tema no está alcanzado en este capítulo.

¿Qué es, entonces, una onda? Definimos una onda como *un fenómeno físico que implica la propagación de energía y cantidad de movimiento sin desplazamiento neto de materia*.

Por ejemplo, si contemplamos las “ondas” que se forman en la superficie de un lago cuando le arrojamos una piedra, podemos advertir que la masa de agua no se desplaza en conjunto desde el punto de impacto hacia afuera, sino que las partículas del medio efectúan un movimiento de “vaivén” (realizan órbitas de radio pequeño) en torno a su posición de equilibrio original. Decimos que la perturbación se propaga en un medio continuo y las variables de esa perturbación son energía y cantidad de movimiento, pero no masa. Desarrollaremos con mayor cuidado este último punto a continuación.

2_CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

- El movimiento ondulatorio, como dijimos previamente, implica la perturbación de un estado inicial de equilibrio. Dicha perturbación aparta al sistema del estado de equilibrio e implica la propagación de energía y cantidad de movimiento por el medio.

- Para que se propague una onda en un cierto medio necesitamos: un emisor de ondas que determina la frecuencia con la que se propaga la perturbación (por ejemplo un motor, la voz, etc.), un medio donde se propaga que determina la velocidad de la onda (por ej., aire, agua, metales, etc., si se trata de ondas mecánicas) y un detector que identifica el fenómeno y puede realizar mediciones (persona, dispositivo).

- Al absorber y reflejar las ondas, los límites del medio influyen en el comportamiento de las mismas.

- **Principio de superposición:** el fenómeno ondulatorio responde a ecuaciones diferenciales lineales. Un sistema puede someterse al mismo tiempo a más de una perturbación de tipo ondulatorio y la resultante es directamente la combinación lineal de todas las perturbaciones individuales. Es decir, si tenemos N ondas:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{N} y_i(x,t)$$

donde $y(x,t)$ es la onda resultante e $y_i(x,t)$cada una de las N ondas individuales.

3_CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS

Existen distintas formas de clasificar las ondas, en acuerdo a varios criterios:

1. Por su naturaleza, podemos dividirlas en **ondas mecánicas y ondas electromagnéticas**[1].

Una onda mecánica es aquella que necesita un medio material para poder propagarse. Ej.: el sonido, las ondas, las ondas que se propagan en cuerdas, en varillas, etc.

Por el contrario, las ondas electromagnéticas pueden propagarse en el vacío. Ej: las ondas de radio, de TV, las microondas, las ondas infrarrojas, la luz visible, la radiación ultravioleta, los rayos X y los rayos gamma.

[1] Aclaramos que esta clasificación no es completa, existen algunos tipos de ondas que no son ni mecánicas ni electromagnéticas. La clasificación aquí adoptada, sin embargo, incluye t6dos los tipos de ondas que serán estudiados en el presente curso.

2. También podemos clasificarlas por su forma de propagarse, en **ondas longitudinales y ondas transversales**.

Definimos una ***onda longitudinal*** como aquella en la que el movimiento de las partículas del medio es paralelo a la dirección de propagación de la onda.

En una ***onda transversal***, por el contrario, dicho movimiento es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

Dentro de las ondas mecánicas, algunas son longitudinales, como el sonido, y otras son transversales, como las ondas que se propagan en cuerdas vibrantes. Las olas presentan una estructura bastante compleja, pues resultan de la combinación de ondas longitudinales y transversales.

Las ondas electromagnéticas, como la luz, son todas ondas transversales.

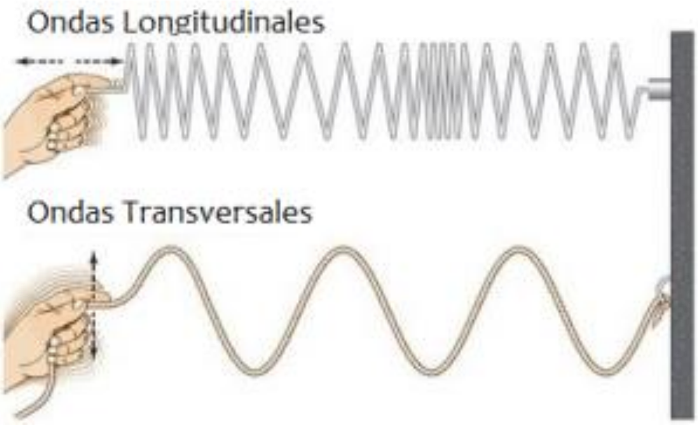

Figura 1

3. En base a la dirección de propagación de la energía pueden ser unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales. Por ejemplo, en una cuerda se propaga una onda unidimensional, sobre la superficie de un lago una onda bidimensional, mientras que la luz o el sonido se propagan tridimensionalmente por todo el espacio.

4. Existe todavía otra clasificación posible, que las divide en **ondas viajeras o progresivas y ondas estacionarias**.

Las ondas viajeras, conocidas como las "verdaderas ondas" consisten efectivamente en una perturbación que transporta energía y cantidad de movimiento a través del espacio, a medida que transcurre el tiempo.

Las ondas estacionarias, por el contrario, consisten en una cierta cantidad de energía "empotrada" o "confinada" en una cierta región del espacio. Son muy importantes a la hora de estudiar la estructura de la materia. De hecho, electrones, protones y neutrones pueden pensarse en términos de ondas estacionarias. Resultan de la superposición de ondas incidentes y reflejadas o expresan patrones que surgen como consecuencia de determinados fenómenos.

4_ LA ECUACIÓN GENERAL DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Todos los movimientos de partículas pueden describirse a partir de la 2° Ley de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Esta ecuación es un **principio**, es decir, se postula sin derivarse de otras consideraciones previas, y se observa que ninguna de sus consecuencias experimentales la contradicen (dentro de la Mecánica Clásica).

En forma equivalente, existe una ecuación válida para todo movimiento ondulatorio, la denominada **ecuación de onda**, la que también, en último análisis, es efectivamente un principio.

Para una onda que se propaga sobre un cierto eje, que llamaremos x, con una velocidad definida y sin distorsión dicha ecuación es:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Por ahora sólo consideraremos el caso unidimensional, recién al tratar ondas sonoras trabajaremos con una onda tridimensional.

Debemos estudiar con cuidado el significado físico de cada uno de los términos de la ecuación, a saber:

- ξ es la denominada elongación, la variable que se está comportando en forma ondulatoria y refiere al apartamiento de la posición de equilibrio. Puede ser tanto la coordenada vertical de posición, como en el caso de una onda transversal que se propaga en una cuerda como la presión o la densidad (para las ondas acústicas), los campos eléctrico y magnético, para las ondas electromagnéticas, etc.

- ***t*** es el tiempo.

- ***v*** es la **velocidad de propagación** de la onda, la que depende exclusivamente de dos factores: el tipo de onda de que se trata y el medio en el que la misma se propaga.

- $\boldsymbol{\xi}$ es la coordenada medida sobre el eje a través del cual se propaga la onda e indica la posición de una partícula del medio continuo.

5_ SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE ONDA

La ecuación de onda admite muchos tipos de soluciones diferentes. Aquí vamos a trabajar con la solución de **onda armónica**, es decir, aquella que se expresa mediante una función de tipo sinusoidal o cosinusoidal.

Debe quedar claro que esta **no** es la única solución posible. Otras formas de solución, tales como las "ondas cuadradas" y las "ondas diente de sierra" no son funciones de tipo armónico[2].

En tal caso una solución posible es:

$$\xi(x,t) = A\, sen\, [k(x - vt)]$$

¿Qué observamos comparando esta expresión con la correspondiente a un movimiento oscilatorio?

Que la ecuación del MAS dependía sólo del tiempo; en cambio la solución de la ecuación de onda es espacio-temporal, con dos variables independientes. Por ello escribimos $\xi(x,t)$ y en el caso de un MAS escribimos $\xi(t)$.
Se trata de una expresión que se repite periódicamente para $t = \frac{x}{v}$, y expresa por lo tanto la naturaleza física de una onda.

Debemos analizar con cuidado los términos que componen esta expresión. Primero estudiemos el significado de k, que denominamos el **número de onda**. Para ello, reemplacemos el valor de x por $x + \frac{2\pi}{k}$. Resulta:

$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = A\, sen\, k\, \left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) = A\, sen\, [k(x - vt) + 2\pi] = \xi(x,t)$$

Por lo tanto, la magnitud λ, que llamaremos **longitud de onda**, y definimos como:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

representa el "período espacial" de la onda, es decir, cada longitud λ se repite el valor que toma la perturbación. En la siguiente figura representamos la onda en cuestión para un tiempo t fijo:

[2] Una rama del análisis matemático, de gran aplicación en electrónica, entre otras disciplinas, es el "análisis armónico" o "análisis de Fourier", consistente en escribir una función periódica no-sinusoidal como una serie de funciones sinusoidales.

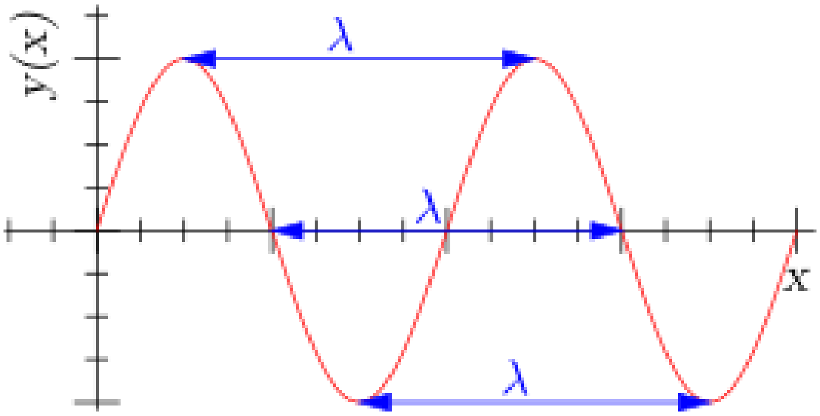

Figura 2

Consideremos el número de onda k dividido por 2π obtenemos:

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$$

es decir, el número de longitudes de onda que hay en la unidad de longitud.

Si ahora escribimos la expresión de onda armónica en función de λ :

$$\xi(x,t) = A\, sen\, [\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)]$$

Que también puede escribirse como:

$$\xi(x,t) = A\, sen\, (kx - \omega t)$$

donde

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

siendo ω la **pulsación** o **frecuencia angular** de la onda.

Consideremos ahora la **frecuencia** f con que la perturbación varía en el tiempo en cada punto del espacio. Recordemos que f depende de la fuente emisora de la onda y la velocidad de propagación c del tipo de onda y del medio en que se propaga. Ya sabíamos que:

$$\omega = 2\pi f$$

de donde:

$$\lambda f = v$$

Por lo tanto, el producto de la longitud de onda por la frecuencia nos permite obtener la velocidad de propagación de la onda.

El período T de la onda estará dado entonces por:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

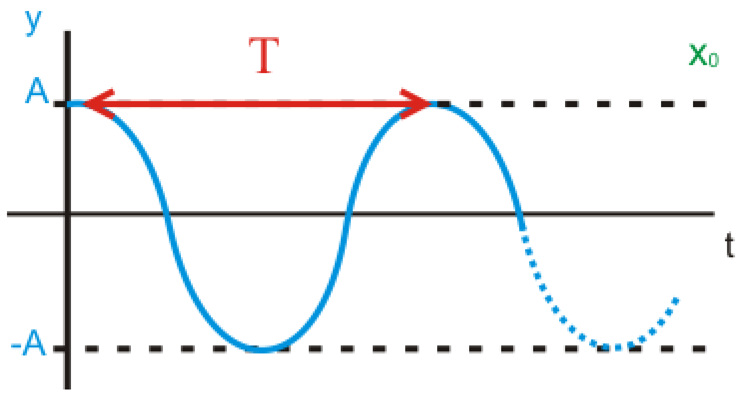

Figura 3

Entonces:

$$\lambda = \frac{v}{f} = v\,T$$

Por lo tanto, la longitud de onda *es la distancia que la onda avanza en un período.*

Es decir observamos que en el caso de las ondas hay dos períodos: el espacial λ y el temporal T.

Finalmente, la amplitud A será el valor máximo que puede adquirir la perturbación que se propaga en forma ondulatoria.

Ahora bien, en realidad hasta ahora hemos trabajado con la solución de onda armónica en forma simplificada. Si queremos escribirla completa debemos tomar en consideración la posible existencia de una *fase inicial* φ, con lo que la fórmula completa resulta:

$$\xi(x,t) = A\ sen\ (kx - \omega t + \varphi)$$

Por convención, la ecuación precedente representa a una onda viajera que se propaga en el sentido positivo del eje x, mientras que para la propagación en el sentido negativo tendremos:

$$\xi(x,t) = A\ sen\ (kx + \omega t + \varphi)$$

Por supuesto, también podría trabajarse con el coseno, modificando la fase inicial en 2π, y aún con una combinación lineal de senos y cosenos.

Ahora bien, **¿Por qué decimos que estamos tratando con una "onda armónica"?** *Porque se expresa como función de senos y cosenos.*

Un error muy común consiste en confundir el movimiento ondulatorio con el movimiento armónico simple. Como dijimos, el primero consiste en la propagación en forma periódica de una perturbación, y se expresa mediante una función espacio-temporal; el segundo implica un movimiento periódico de una partícula de un medio material y su dependencia es sólo temporal.

Ahora bien, consideremos la expresión de la onda para un punto determinado del espacio x_e. Resulta:

$$\xi(x,t) = A\ sen\ (kx_e - \omega t + \varphi)$$

Que podemos interpretar como un movimiento armónico simple cuya fase inicial es:

$$kx_e + \varphi$$

Por lo tanto para una onda armónica, la perturbación que estemos considerando para un punto fijo del espacio varía en la forma de un movimiento armónico simple.

Frente de onda:

Un último concepto introductorio es el de frente de onda. Lo definimos como el conjunto de todos los puntos del espacio que están vibrando en "fase", es decir con la misma elongación, velocidad y aceleración. La fase es el argumento de la función sinusoidal, es decir:

$$(kx - \omega t + \varphi)$$

<u>Ejercicio:</u> demostrar que la distancia entre dos frentes de onda consecutivos es igual a la longitud de onda λ.

Problema:

Consideremos una onda que se propaga por una cuerda, dada por la expresión:

$$\xi(x,t) = (0{,}03\ m)\ sen\ \left(2{,}2\frac{1}{m}x - 3{,}5\frac{1}{s}t\right)$$

a) Hallar la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) Calcular la velocidad máxima alcanzada por cualquier punto de la cuerda.

Con los datos del problema, aplicando el modelo ondulatorio, obtenemos V = 1,59 m/s.

Es más interesante responder la pregunta **b)**, porque nos conduce a diferenciar entre velocidad de propagación y velocidad de oscilación. La primera es la velocidad con la que se propaga la perturbación que constituye la onda, la segunda es la velocidad con la que oscila cada punto, en este caso de la cuerda, individualmente. Por lo tanto, la velocidad de oscilación **de las partículas de la cuerda** será:

$$V(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = (0{,}03\,)\,(-3{,}5)\,cos\,\left(2{,}2\frac{1}{m}x - 3{,}5\frac{1}{s}t\right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}Máx = (0{,}03\,)\,(3{,}5) = 0{,}105\frac{m}{s}$$

<u>Pregunta:</u> si quisiéramos ahora calcular la aceleración de las partículas, ¿Qué deberíamos hacer?

Ahora, tenemos que estudiar algunos ejemplos específicos de ondas, para lo cual será necesario para cada tipo de onda y en cada medio calcular la velocidad de propagación correspondiente.

6_ ONDAS TRANSVERSALES EN UNA CUERDA

En este párrafo la letra *T se usa* como símbolo de la fuerza tensión, en lugar de período, y se aplicará también en otros párrafos más adelante.

Consideremos una cuerda tensa en equilibrio, sometida a una tensión *T*. Efectuamos un pequeño desplazamiento de un elemento AB de la cuerda, transversal a la misma, apartándolo del equilibrio.

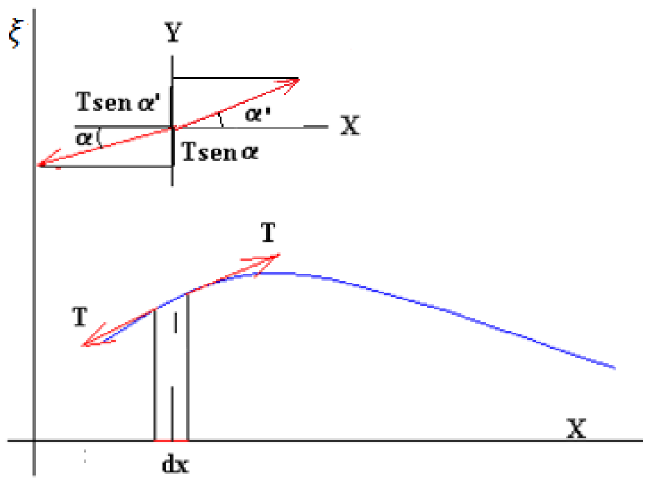

Figura 4

El elemento de cuerda experimentará una fuerza resultante, en la dirección transversal a la cuerda, igual a:

$$F_y = T\ (sen\ \alpha' - sen\ \alpha)$$

Pero los dos ángulos, α' y α son prácticamente iguales, por lo que la diferencia $(sen\ \alpha' - sen\ \alpha)$ es muy pequeña y puede ser escrita como $d(sen\ \alpha)$, con lo que indicamos que la cantidad entre paréntesis es diferencial.

Por lo tanto:

$$F_y = Td\ (sen\ \alpha)$$

Y como α es también muy pequeño, podemos aproximar el seno por la tangente:

$$F_y = Td\ (tg\ \alpha) = T\frac{d}{dx}(tg\ \alpha)dx$$

Pero $tg\ \alpha$ es la pendiente de la curva adoptada por la cuerda, es decir:

$$tg\ \alpha = \frac{d\xi}{dx}$$

Por lo tanto:

$$F_y = T\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)dx = T\frac{d^2\xi}{dx^2}dx$$

Lo que a su vez será igual a la masa de la sección de cuerda multiplicada por su aceleración, masa que también consideramos diferencial:

$$T\frac{d^2\xi}{dx^2}dx = dm\ \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Introducimos ahora el concepto de *densidad lineal de masa* μ, definido como

$$\mu = \frac{dm}{dx}$$

que consiste, esencialmente, en la masa por unidad de longitud.

Pregunta: ¿Qué relación tiene la densidad lineal de masa con la densidad volumétrica?

Tenemos entonces que:

$$T\frac{d^2\xi}{dx^2}dx = \mu\ dx\ \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Con algunos despejes:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{T}{\mu}\ \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

que es la ecuación de onda, en la que, por lo tanto,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda depende de la tensión y de la masa por unidad de longitud.

Problema: la tensión aplicada a una cuerda se obtiene colgando de la misma una masa de 3 kg. La longitud de la cuerda es de 2,5 m y su masa de 50 g. Calcular la velocidad de las ondas transversales que se propagan en la cuerda.

Respuesta: con los datos del problema obtenemos que:

$$\mu = 0{,}02\frac{kg}{m} \qquad\qquad v = 38{,}3\ m/s$$

7_ ONDAS LONGITUDINALES EN UNA VARILLA

Consideremos una varilla sólida, a la que se le aplica una perturbación en uno de sus extremos. Si las condiciones de la varilla permiten que la perturbación se propague a través de la misma hasta el otro extremo, diremos que se ha propagado una **onda longitudinal a través de la varilla.**

Consideremos una varilla de sección transversal uniforme A sobre la que se aplica una fuerza F a lo largo de su eje.

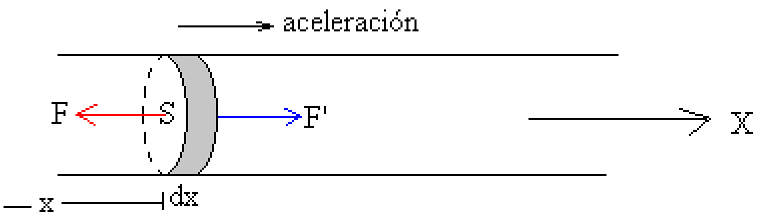

Figura 5

Definimos el esfuerzo normal σ como la fuerza por unidad de área que actúa perpendicularmente a la sección transversal de la varilla.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

El esfuerzo normal tiene unidades de presión, y se mide por lo tanto en N/m^2, es decir, en pascales (Pa).

El esfuerzo referido dará origen a una deformación de la varilla, que llamamos $d\xi$ y consideramos pequeña.

Definimos la **deformación lineal** como la deformación por unidad de longitud, a saber:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}$$

Ahora bien, los materiales con los que vamos a trabajar son aquellos que cumplen con la Ley de Hooke, según la cual el esfuerzo normal es proporcional a la deformación lineal:

$$\sigma = Y\varepsilon$$

La constante de proporcionalidad en la expresión anterior es el **módulo de elasticidad de Young**, un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, y del que ofrecemos una tabla de valores a continuación.

Material	Módulo de elasticidad Y (GPa)
Aleación de aluminio	71,7
Cobre al berilio	127,6
Latón, bronce	110,3
Cobre	120,7
Hierro fundido gris	103,4
Hierro fundido dúctil	168,9
Hierro fundido maleable	172,4
Aleaciones de magnesio	44,8
Aleaciones de niquel	206,8
Acero al carbono	206,8
Aleaciones de acero	206,8
Acero inoxidable	189,6
Aleaciones de titanio	113,8
Aleaciones de zinc	82,7

Tabla 1

A partir de las consideraciones previas, la fuerza F que estamos ejerciendo sobre la varilla puede escribirse en la forma:

$$F = YA\varepsilon = YA\frac{d\xi}{dx}$$

Ahora bien, sobre un volumen diferencial de la varilla actuarán dos fuerzas, F y F´, de sentido contrario (ver figura 6). La fuerza neta sobre el volumen será:

$$F' - F = dF$$

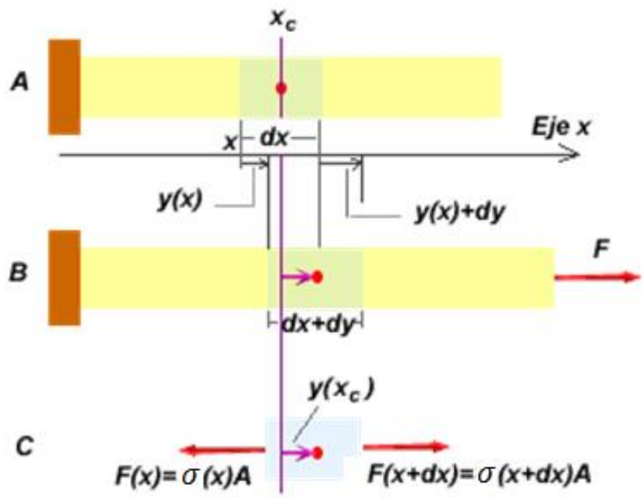

Figura 6

En la parte “C” de la figura se representa la porción diferencial de la varilla dx, en una posición deformada δξ donde la fuerza resultante estudiada será “dF” =F(x+dx)-F(x), la que provocará la aceleración de la masa dm.

$$\frac{dF}{dx} = YA\frac{d^2\xi}{dx^2}$$

Si ρ es la densidad de la varilla, supuesta homogénea,

$$dm = \rho dV = \rho A dx$$

y como $d\xi$ era la deformación experimentada por la varilla, tenemos:

$$dF = dm\frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho A dx\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Es decir:

$$\frac{dF}{dx} = \rho A\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Si ahora reunimos las dos expresiones halladas para $\frac{dF}{dx}$ obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

que es la ecuación de onda, y por lo tanto la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales en una varilla será:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

En una varilla sólida también pueden propagarse ondas transversales, si bien son menos frecuentes que las longitudinales. Se pueden propagar mediante una torsión de la varilla, producida mediante través de la aplicación de un torque o bien por un golpe dado transversalmente a la varilla. En ambos casos la velocidad de propagación de la onda transversal es:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

donde G es el **módulo de rigidez.**

Material	**Módulo de rigidez G (GPa)**
Aleación de aluminio	26,8
Cobre al berilio	49,4
Latón, bronce	41,5
Cobre	44,7
Hierro fundido gris	40,4
Hierro fundido dúctil	65,0
Hierro fundido maleable	66,3
Aleaciones de magnesio	16,8
Aleaciones de niquel	79,6
Acero al carbono	80,8
Aleaciones de acero	80,8
Acero inoxidable	74,1
Aleaciones de titanio	42,4
Aleaciones de zinc	31,1

Tabla 2

8_ ENERGÍA DE LAS ONDAS: ENERGÍA CINÉTICA Y ENERGÍA ELÁSTICA

La energía cinética

Consideremos una onda armónica dada por la expresión:

$$\xi(x,t) = A\, sen\,(kx - \omega t + \varphi)$$

La onda se propaga a través de un medio en el que definimos un elemento de volumen dV_o, que podemos escribir como el producto de la sección transversal dS por su longitud dx.

$$dV_o = dS.dx$$

La energía cinética del elemento de volumen considerado es:

$$E_c = \frac{1}{2} dm V^2$$

Con *dm* la masa del elemento de volumen considerado y V la velocidad de oscilación de dicho elemento, dada por:

$$V(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\,\omega\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

A su vez, la masa del elemento diferencial es:

$$dm = \delta\, dV_o = \delta\, dSdx$$

siendo δ la densidad del medio.

Por lo tanto:

$$E_c = \frac{1}{2}\delta\, dSdxV^2 = \frac{1}{2}\delta\, dSdxA^2\,\omega^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

Si dividimos por el volumen del cilindro obtenemos la densidad de energía cinética:

$$K_c = \frac{1}{2}\delta\, A^2\omega^2\cos^2(kx - \omega t + \varphi)$$

Por consiguiente, la densidad de energía cinética propagada durante un movimiento ondulatorio presenta, al igual que la onda armónica en sí misma, un comportamiento sinusoidal, y se representa por medio de una función con dependencia espacio-temporal. **El valor medio** de esta expresión será:

$$< K_c >= \frac{1}{4}\delta A^2\omega^2$$

La energía elástica

Ahora bien, la onda armónica en cuestión se está propagando en un medio elástico. Dicho medio se encuentra deformado, y poseerá, por lo tanto, una cierta energía potencial de deformación, de tipo elástico.

Se puede demostrar que el valor medio de esta densidad de energía potencial elástica es igual al valor medio de la densidad de energía cinética; por lo tanto:

$$< K_e >= \frac{1}{4}\delta A^2\omega^2$$

Esto tiene una consecuencia importante, relacionada con el hecho de que la onda se propaga en una medio continuo. Estamos acostumbrados a trabajar con situaciones en las que un mínimo de energía potencial implica un máximo de energía cinética, y viceversa. Sin embargo, si observamos las expresiones de la energía cinética y de la energía elástica, cuando una es máxima o mínima lo mismo ocurre con la otra.

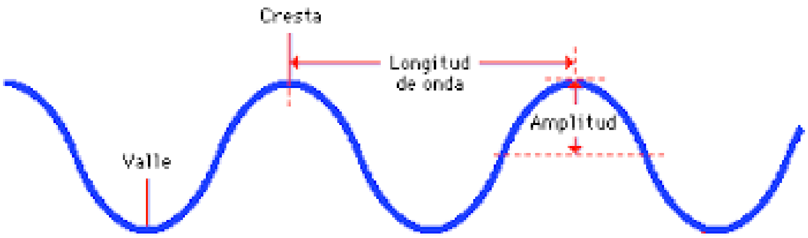

Figura 7

Para entender esto último, supongamos que tenemos una onda transversal que se propaga en una cuerda. En los puntos correspondientes a la cresta, el elemento de cuerda se ha desplazado perpendicularmente a su posición de equilibrio; no existe, por lo tanto, deformación por torsión y la densidad de energía elástica, en ese punto, es nula. Pero tratándose del punto de máximo apartamiento de la posición de equilibrio, la energía cinética en la cresta también será nula. Un razonamiento equivalente puede aplicarse a los puntos en los que ambas energías son máximas.

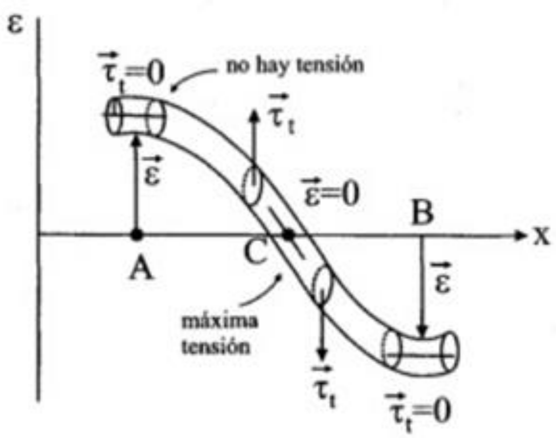

Figura 8[3]

[3] Figura 8 -Mecánica Elemental, Roederer

Por lo tanto, el valor medio de la densidad total de energía correspondiente al movimiento ondulatorio será

$$< K >= \frac{1}{2}\delta\, A^2\omega^2$$

que escrito en términos de la frecuencia resulta:

$$< K >= 2\pi^2\delta\, A^2 f^2$$

Por lo tanto, dicho valor es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia de la onda. Si se trata de una onda sonora, a los efectos de la percepción del oído humano es parámetro más relevante es la amplitud.

Recordemos que esto es la *densidad* de energía total media propagada por la onda. Si ahora queremos la *energía total E* correspondiente debemos multiplicar la densidad de energía por el volumen del elemento diferencial considerado. Es decir:

$$< E >= 2\pi^2\delta\, A^2 f^2 dSdx$$

Pero la onda avanza una distancia igual a *dx* en un tiempo *dt*, propagándose con la velocidad *v*.

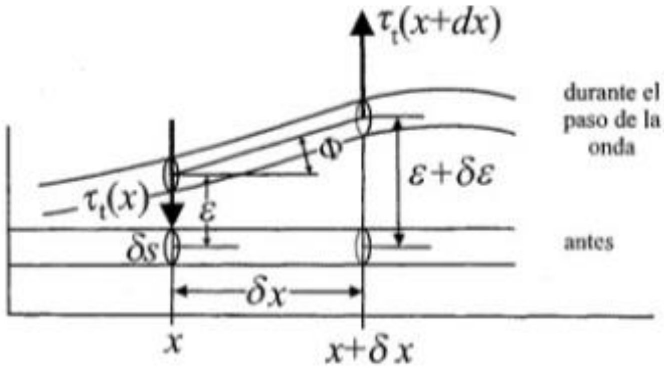

Figura 9

Entonces:

$$< E >= 2\pi^2\delta A^2 f^2 dSdx$$

Definimos como potencia media de la onda, a la energía media transmitida por unidad de tiempo.

$$< P >= 2\pi^2\delta A^2 c f^2 dS$$

Y a la *intensidad I* de la onda a la energía que atraviesa en un *dt* a la superficie *dS*, siempre considerando esta última en forma perpendicular a la propagación.

Entonces:

$$I = \frac{< E >}{dt\ dS}$$

$$I = 2\pi^2 v\ \delta\ A^2 f^2$$

En la forma en que ha sido definida, I tiene unidades de potencia por unidad de superficie y, por lo tanto, se mide en $\frac{watt}{m^2}$.

Ahora, vamos a concentrarnos en el caso particular de una onda de sonido, debido a que podemos encontrar una correlación entre estas expresiones y nuestras percepciones sensoriales.

Para una onda sonora teníamos que la amplitud A es igual a:

$$A = \frac{\Delta p_o}{2v\delta\pi f}$$

donde Δp_o era la amplitud de presión.

Por lo tanto:

$$I = \frac{\Delta p_0^2}{2v\delta}$$

Nótese que la intensidad de una onda sonora, para velocidad de propagación y densidad del medio constantes, depende esencialmente de la amplitud de presión y no de la frecuencia o de la longitud de onda.

Ahora bien, la intensidad es una magnitud correctamente definida desde un punto de vista físico, pero que presenta un problema cuando se la relaciona con las percepciones auditivas del ser humano. Sonidos que al oído humano presentan intensidades similares o apenas diferentes, sin embargo son intensidades que difieren en varios órdenes de magnitud.

Debido a ello, se desarrolló una nueva magnitud, denominada *nivel de intensidad*[4], que soluciona el problema referido y se define como:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

[4] Los distintos autores no siempre usan las mismas denominaciones. En algunos textos se emplean los términos intensidad y nivel de intensidad al revés que en el presente trabajo.

donde β es el nivel de intensidad, el logaritmo considerado es el logaritmo decimal e I_0 es el orden de magnitud en el que se encuentra la intensidad mínima audible por el oído humano.

Acerca del nivel de intensidad debemos formular varias observaciones:

- No es una magnitud física propiamente dicha, sino una definición útil, empleada extensamente en ingeniería.
- Se mide en *decibeles* (dB).
- Si β es igual a cero, eso no significa que no exista la onda sonora, sino que su intensidad es menor que la mínima audible para el oído humano.
- Supongamos un sonido cuya intensidad sea seis órdenes de magnitud superior a la mínima audible, es decir $I = 10^6 I_0$. Aplicando la definición resulta β= 60 dB, con lo que se obtienen diferencias en la intensidad del sonido más acordes con lo que puede percibirse.
- 1 dB corresponde a la mínima diferencia de intensidades que el oído humano es capaz de percibir.
- El umbral de dolor del ser humano es de aproximadamente 140 dB,

En la tabla siguiente mostramos algunos niveles de intensidad correspondientes a situaciones características.

La exposición a ruidos superiores a 85-90 decibeles durante varias horas por día causa daños irreversibles a nuestros oídos.	
Biblioteca	30 dB
Conversación suave	40 dB
Lluvia	50 dB
Charla	60 dB
Transito moderado	70 dB
Despertador	80 dB
Motociclista	90 dB
Camión de basura	100 dB
Discoteca	110 dB
Avión despegando	120 dB
Taladro neumático	130 dB
Disparos cercanos	140 dB

Tabla 3

Ahora bien, lo precedente parece no coincidir con una situación de la experiencia cotidiana. Todos sabemos que la intensidad percibida del sonido decrece si nos alejamos de la fuente que lo emite, lo que parece no estar contemplado en las ecuaciones desarrolladas previamente.

La cuestión pasa por el hecho que el sonido es una onda esférica, que se propaga por lo tanto en tres dimensiones, de donde la ecuación que la describe será de la forma:

$$y(\vec{r},t) = A\, sen\, (\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

donde hemos escrito "r" en lugar de "x" precisamente para indicar tal condición tridimensional. Al respecto, el producto $\vec{k}\cdot\vec{r}$ en la expresión anterior es realmente un producto escalar entre dos vectores; sin embargo, aquí no profundizaremos en ese nivel de detalle.

Los frentes de onda de una onda sonora, por lo tanto, son esferas centradas en el punto en el que se emite la onda. Dichas esferas se propagan con la velocidad que el sonido presente en el medio bajo consideración.

Ahora, si repasamos la definición de la intensidad I resultará claro que la potencia total propagada[5] en un frente de onda de radio r será:

$$P = I.S = I(4\pi r^2) = 2\pi r^2 \delta\, \omega^2 A^2 v$$

Si el medio es no-disipativo, es decir, la onda no experimenta algún tipo de amortiguamiento, la potencia deberá ser la misma en todo frente de onda, y además igual a la potencia irradiada por la fuente. Siendo entonces P constante, esto implica que I debe decaer con el cuadrado de la distancia. En tal caso, la amplitud A, a su vez, ya no será la misma en todo frente de onda, y también resultará inversamente proporcional a la distancia a la fuente. Esto explica la habitual (y real) sensación de que el volumen del sonido se reduce con la distancia a la fuente.

[5] También se acostumbra decir que la potencia "atraviesa" la esfera de radio r.

SUPERPOSICIÓN DE ONDAS

9_ INTRODUCCIÓN

En los cursos de análisis matemático y de álgebra se define la linealidad[6].

En el caso de la ecuación que utilizaremos para describir nuestro modelo físico matemático de ondas unidireccionales, de amplitud pequeña que se desarrollan en medios elásticos, la propiedad de linealidad de esa ecuación permite considerar desde el punto de vista físico, lo que históricamente e independientemente de la herramienta matemática actual que se utiliza para estudiar este modelo, se dio en llamar "Principio de Superposición".

Durante muchos años, desde los experimentos de Galileo hasta los físicos franceses del siglo XVIII, nos legaron conocimientos y metodología, mediante los cuales se logran explicar fenómenos de interferencia, batidos, ondas estacionarias, etc, aplicando el modelo de ondas y el método de superposición.

La herramienta matemática utilizada puede ser formalismo de números complejos, expresiones trigonométricas o recursos gráficos como de vectores rotantes (fasores).

Formalismo complejo:

$$\xi = \xi_0 \exp[j(kx - \omega t + \varphi)]$$

(tenemos en cuenta el término real solamente)

Expresiones trigonométricas: $\xi = \xi_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$

Fasores

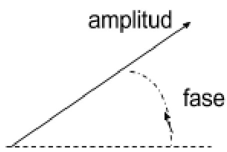

Figura 10

Donde:

[6] En el caso de la ecuación que utilizaremos para describir nuestro modelo físico matemático de ondas unidireccionales de amplitud pequeña que se desarrollan en medios elásticos, la propiedad de linealidad de esa ecuación permite considerar desde el punto de vista físico, lo que históricamente e independientemente de la herramienta matemática actual que se utiliza para estudiar este modelo, se dio en llamar "Principio de Superposición"

ξ: es la elongación

ξ_0: es la amplitud o elongación máxima

k: es el número de onda

ω: es la frecuencia angular

φ: es la constante de fase o fase inicial

j: es la unidad de número imaginario $j = \sqrt{-1}$

10_CASOS ELEMENTALES DE SUPERPOSICIÓN CON INTERPRETACIÓN FISICA.

A continuación, estudiaremos los casos de superposición de ondas que se propagan con igual dirección y sentido:

I) de igual frecuencia y amplitudes diferentes.

II) de frecuencias muy parecidas y amplitudes iguales, también llamado: batido.

Por el momento dejaremos sin desarrollar la superposición de ondas de distinta dirección. Y también las de igual dirección pero de sentidos opuestos, estas últimas las trataremos en ondas estacionarias.

I) Igual frecuencia y amplitudes diferentes. Justificación del método Fasorial

a) Fasores.

En este caso suponemos frecuencias, direcciones y sentido iguales.

$$\xi = \xi_{01}\cos(k_1 x - \omega t + \emptyset_1) + \xi_{02}\cos(k_2 x - \omega t + \emptyset_2)$$

Se representan los fasores, por simplicidad, para t=0 s.

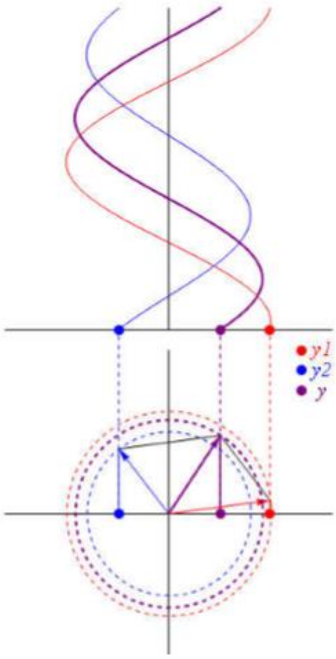

Figura 11

Debido a que se considera igual frecuencia, este mismo diagrama fasorial permanecerá con el ángulo de desfasaje “rígidamente” fijo, y se debería verlo rotar alrededor del centro “O” con velocidad angular igual a la frecuencia angular del movimiento ondulatorio.

A partir de aquí explicitamos primero el **método fasorial** que resulta más intuitivo, para luego también explicar el método con la utilización de funciones trigonométricas. Dejaremos el formalismo complejo para un desarrollo posterior en una publicación más avanzada.

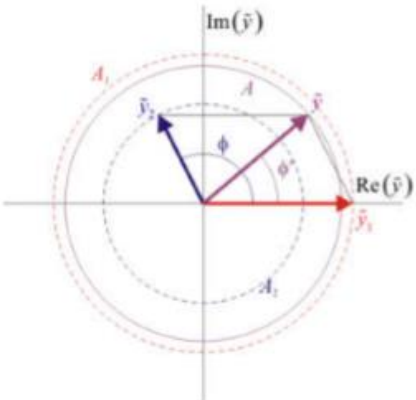

Figura 12

Podemos hallar el módulo del fasor resultante mediante el teorema del coseno (lo justificaremos en el método de funciones trigonométricas).

b) Funciones trigonométricas.

$$\xi = \xi_{01}\cos(k_1 x - \omega t + \emptyset_1) + \xi_{02}\cos(k_2 x - \omega t + \emptyset_2)$$

Recordamos identidades relativas al coseno de la suma de ángulos[7]

$$\xi = \xi_{01}\cos(kx - \omega t)\cos\emptyset_1 - \xi_{01}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\,\mathrm{sen}\,\emptyset_1 +$$

$$\xi_{02}\cos(kx - \omega t)\cos\emptyset_2 - \xi_{02}\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\,\mathrm{sen}\,\emptyset_2$$

$$\xi = (\xi_{01}\cos\emptyset_1 + \xi_{02}\cos\emptyset_2)\cos(kx - \omega t) - (\xi_{01}\,\mathrm{sen}\,\emptyset_1 + \xi_{02}\,\mathrm{sen}\,\emptyset_2)\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Comparando entre las ecuaciones, los términos afectados por el seno del argumento temporal y espacial son equivalentes entre sí, y los términos afectados por el coseno del argumento temporal y espacial también son equivalentes entre sí.

$$\xi = \xi_0\cos\emptyset\ \cos(kx - \omega t) - \xi_0\,\mathrm{sen}\,\emptyset\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Estas ecuaciones nos permiten calcular la fase inicial y la amplitud resultantes respectivamente.

$$\xi_0\,\mathrm{sen}\,\emptyset = \xi_{01} sen\ \emptyset_1 + \xi_{02} sen\ \emptyset_2$$

$$\xi_0\cos\emptyset = \xi_{01} cos\ \emptyset_1 + \xi_{02} cos\ \emptyset_2$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\mathrm{tg}\,\emptyset = \frac{\xi_{01} sen\ \emptyset_1 + \xi_{02} sen\ \emptyset_2}{\xi_{01} cos\ \emptyset_1 + \xi_{02} cos\ \emptyset_2}$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$\xi_0^2 = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}(cos\ \emptyset_1\ cos\ \emptyset_2 + sen\ \emptyset_1 sen\ \emptyset_2)$$

$$\xi_0^2 = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}(\emptyset_1 - \emptyset_2)$$

[7] EC 7 bis $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp sen\ A\ sen\ B$

Que corresponde al esquema de fasores siguiente:

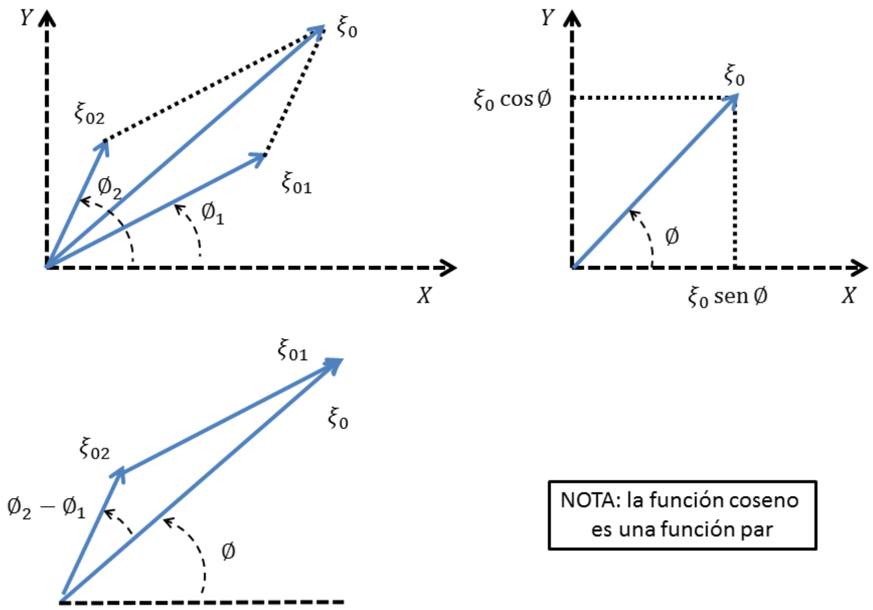

Figura 13

Entonces la solución particular para el caso de frecuencias iguales y además amplitudes iguales es una ecuación armónica cuya amplitud es función de la amplitud de cada componente y de la diferencia de fase inicial de dichas componentes:

$$tg\,\emptyset = \frac{sen\,\emptyset_1 + sen\,\emptyset_2}{cos\,\emptyset_1 + cos\,\emptyset_2} = \frac{\left(sen\,\frac{\emptyset_1 + \emptyset_2}{2}\right)\left(cos\,\frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right)}{\left(cos\,\frac{\emptyset_1 + \emptyset_2}{2}\right)\left(cos\,\frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right)}$$

$$tg\,\emptyset = tg\left(\frac{\emptyset_1 + \emptyset_2}{2}\right) \rightarrow \emptyset = \frac{\emptyset_1 + \emptyset_2}{2}$$

Si **las dos amplitudes de las ondas componentes son iguales** se verifica, teniendo en cuenta la identidad indicada al pie[8], que:

$$\xi_0^2 = \xi_{01}^2 + \xi_{01}^2 + 2\xi_{01}^2 \cos(\emptyset_1 - \emptyset_2)$$

$$\xi_0^2 = 2\xi_{01}^2(1 + \cos(\emptyset_1 - \emptyset_2))$$

[8] EC 10 bis

$$sen\,A + sen\,B = 2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}$$
$$cos\,A + cos\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}$$
$$1 + cos\,2A = 2\,cos^2 A$$

$$\xi_0^2 = 2\xi_{01}^2 2cos^2\left(\frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right) = 4\xi_{01}^2 cos^2\left(\frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right)$$

$$\xi_0 = 2\xi_{01}\left|cos\left(\frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right)\right|$$

Esquema de fasores

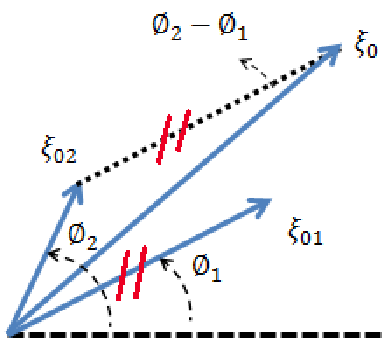

Figura 14

Por lo tanto, la ecuación de la onda resultante la podemos deducir del método fasorial o de las funciones trigonométricas y nos queda:

$$\xi = 2\xi_{01}\left|cos\left(\frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right)\right|.\cos\left(kx - \omega t + \frac{\emptyset_1 - \emptyset_2}{2}\right)$$

II) De frecuencia muy parecida y amplitudes iguales- Batido.

Tengamos en cuenta dos ondas que se propagan en misma dirección y sentido. Por simplicidad, en este estudio elemental vamos a considerar que las amplitudes de ambas son iguales y además que la diferencia de fase es nula para tiempo igual a 0 s.

Para este fenómeno físico vamos a tener en cuenta un modelo lineal y para ello supondremos que las frecuencias angulares son diferentes pero próximas. Es decir que la frecuencia de una no es igual a la frecuencia de la otra onda, pero la diferencia de frecuencias realmente es mucho menor que la frecuencia de las ondas que consideramos.

$$\xi_1 = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\xi_2 = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

Utilizamos una identidad trigonométrica conveniente antes de hacer los gráficos.

$$cos\ A + cos\ B = 2\ cos\ \frac{A+B}{2}\ cos\ \frac{A-B}{2}$$

Los valores $\tilde{k}$ y $\tilde{\omega}$, son promedio de valores de número de onda y frecuencia angular de cada onda incidente. Como los valores de cada onda son similares el promedio también lo será.

$$\tilde{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Las diferencias de valores de número de onda y de frecuencia angular, son pequeñas lo cual indica una variación temporal y espacial "lenta". La amplitud resultante está modulada por la función coseno.

$$2\ \xi_0 \cos\left[\frac{(k_1 - k_2)\ x + (\omega_1 - \omega_2)\ t}{2}\right]$$

La ecuación resultante es:

$$\xi(x,t) = 2\ \xi_0 \cos\left[\frac{(k_1 - k_2)\ x + (\omega_1 - \omega_2)\ t}{2}\right] [\cos(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t)]$$

El factor, entre corchetes, produce una amplitud variable en el tiempo. A la $\omega_a = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}$, la llamamos ω_a de amplitud.

Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, la frecuencia ω_a es pequeña y fluctúa lentamente. Este fenómeno es una forma de modulación de amplitud. Un máximo de intensidad ocurre dos veces en un ciclo (recordamos que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud). De modo que el número de pulsos por segundo en un ciclo es el doble del número de ciclos por segundo de la frecuencia de amplitud.

La frecuencia de batido es entonces $f_b = |f_1 - f_2|$ y se percibe dos veces en un ciclo.

Gráfico del desplazamiento de las ondas individuales (arriba) y del resultado de la superposición de las ondas en función del tiempo (abajo).

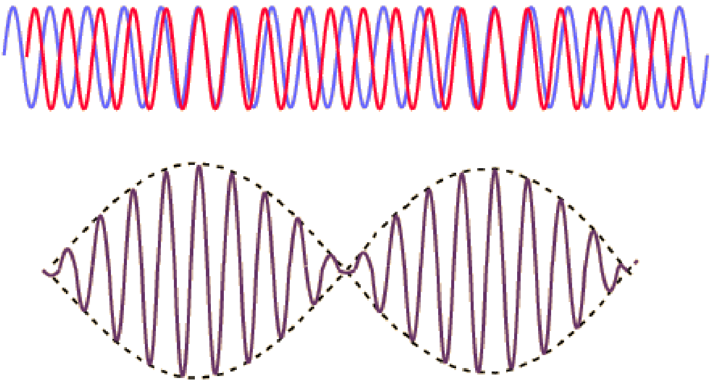

Figura 15

11_ ONDAS ESTACIONARIAS

Hasta aquí hemos estudiado la propagación de ondas en medios infinitos. Pero ¿Qué sucede cuando se "establece" una onda en un medio finito?, por ejemplo una soga, un tubo, una estructura. Este término de establecerse indica otra condición de la energía ya que la misma no se propaga por el medio elástico sino que permite que el medio oscile de diferentes formas. Estamos en presencia de una onda estacionaria.

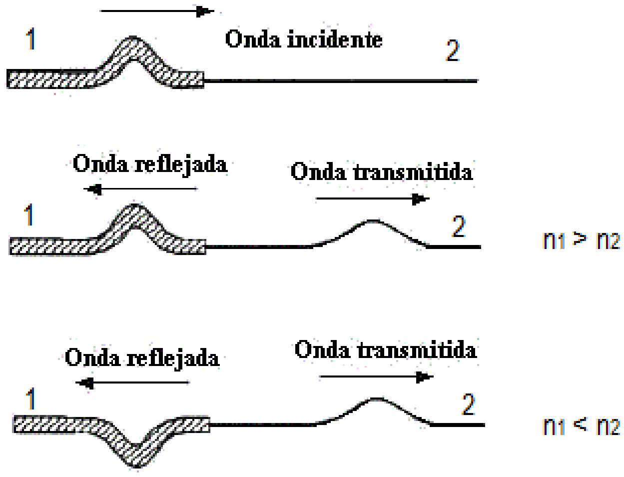

Figura 16

Recordamos que cuando un sistema masa-resorte oscila lo hace con una única frecuencia dada por ω=k/m donde k es la constante del resorte y m la masa oscilante. En cambio, cuando se establece en un medio elástico una onda estacionaria tiene "n" modos propios o naturales de oscilación. A cada uno de ellos le corresponderá una frecuencia que llamaremos f_n de tal modo que $v=f_n.\lambda_n$ (1)

Pero ¿Cómo explicamos la formación de una onda estacionaria?

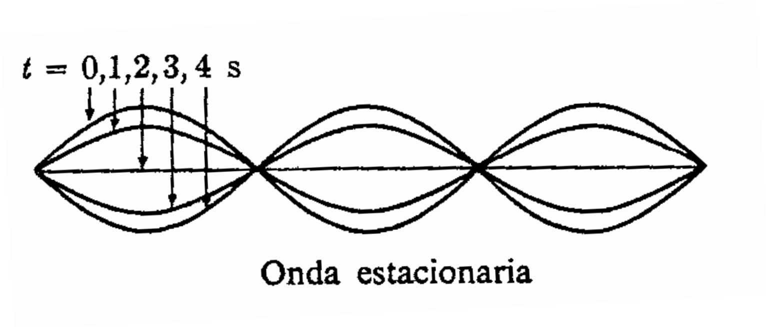

Figura 17

Por el principio de superposición:

$$\xi_{total}(x,t) = \xi_{inc}(x,t) + \xi_{reflejada}(x,t)$$

Supongamos que

$$\xi(x,t) = A\,sen\,(kx - \omega t) + A\,sen\,(kx + \omega t)$$

$A\,sen\,(kx - \omega t)$ *incidente*

$A\,sen\,(kx + \omega t)$ *reflejada*

Por la propiedad trigonométrica de la suma de dos senos nos queda:

$$\xi(x,t) = 2A\,sen\,(kx)\,cos\,(\omega t)$$

Observamos que esta ecuación no corresponde a una onda propagante, la primera función depende de la posición y la segunda del tiempo.

Observamos que la ecuación anterior corresponde a un movimiento oscilatorio, el término entre corchetes es la amplitud resultante A_R que depende de la posición:

$$\xi(x,t) = [2A\,sen\,(kx)]cos\,(\omega t) = A_R cos\,(\omega t)$$

Para establecerse una onda estacionaria deben cumplirse ciertas condiciones de borde o frontera. En el caso de la cuerda, si x=L, la cuerda siempre está fija. Es decir,

$\xi(L,t) = 2A\,sen\,(kL)\,cos\,(\omega t) = 0$ (2)

Es decir, la $A_R = 0 \rightarrow sen\,(kL) = 0$

Por lo tanto

$kL = n\pi \quad n \in N_0$

Como para cada n tenemos un k diferente, lo indicamos con un subíndice:

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}}$$

Por (1)

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L}$$

$$\boxed{f_n = n\frac{v}{2L}}$$

Donde f_n representan los *n* modos posibles de vibración. El conjunto de frecuencias posibles de oscilación se llama "espectro de frecuencias naturales de oscilación".

Para n=1 la frecuencia que obtenemos es la fundamental y para los n siguientes obtenemos los armónicos de la serie. Observemos que en este caso los armónicos son múltiplos de la frecuencia fundamental.

Dijimos también que los extremos de la cuerda tienen elongación igual a 0, los llamamos "nodos". No son los únicos, ya que:

$$sen\ (kx) = 0$$

Posición nodos

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$$

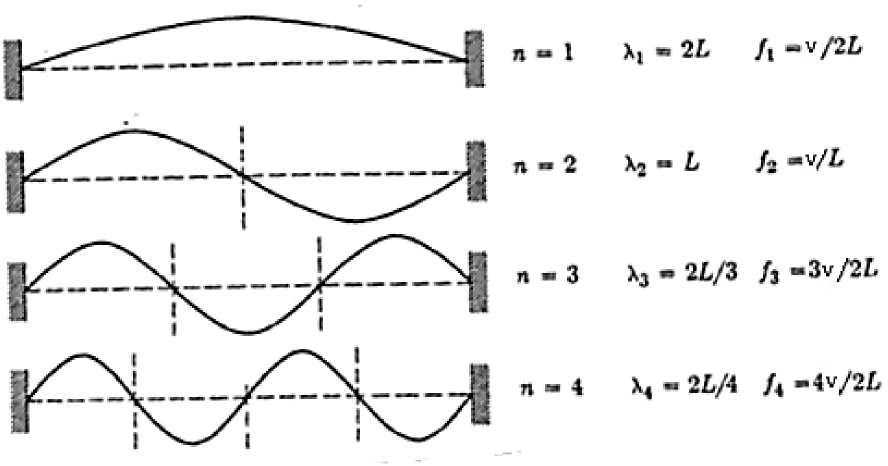

Figura 18

Observemos que la distancia entre dos nodos es $\frac{\lambda}{2}$.

Por otro lado, hay posiciones para las cuales la A_R tomará valor máximo de módulo 2A. O sea $|\text{sen } kx| = 1$

Por lo tanto, para $kx = (2n + 1)\, \pi/2$

Posición máximos o antinodos.

$x = (2n + 1)\, \lambda/4$

Los antinodos podemos obtenerlos también considerando que:

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = 0$$

La distancia entre dos antinodos también es λ/2. Por lo tanto, la distancia entre un nodo y un antinodo es λ/4.

Para el caso de la cuerda, las soluciones posibles podemos escribirlas como:

$$\xi_n(x, t) = [2A\, sen\, (k_n x)\,]cos\, (\omega_n t)$$

O también:

$$\xi_n(x, t) = \left[2A\, sen\, \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)\right] cos\, (2\pi f_n t)$$

Para cada valor de n tenemos un modo normal de oscilación.

En el caso de una cuerda atada en un extremo y libre en el otro:

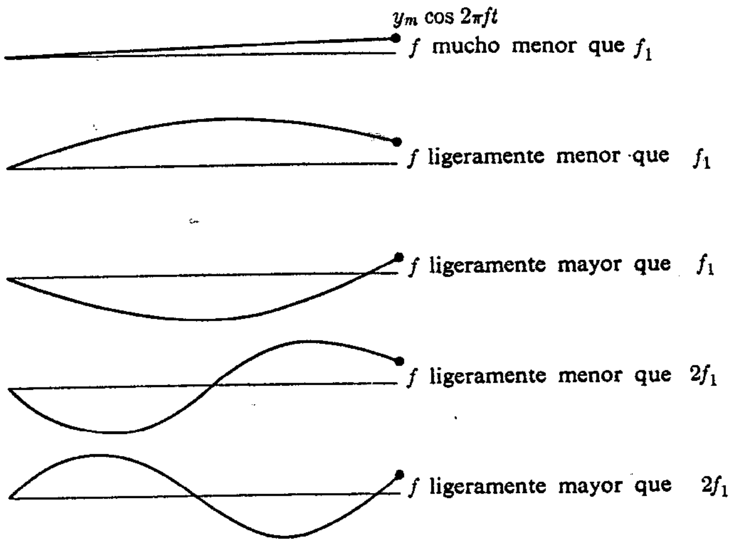

Figura 19

En x=0 que lo hicimos coincidir para con el extremo fijo: $\xi(0,t) = 0$

En x=L es posible obtener un máximo o $\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = 0$

$$|\mathrm{sen}\ \mathrm{kL}| = 1$$

$$\mathrm{kL} = (2\mathrm{n} - 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n+1}}$$

$f_n = \frac{(2n-1)v}{4L}$ (Para n=1,2,..)

El espectro de frecuencias corresponde a múltiplos impares de f

Y las soluciones pueden escribirse también:

$$\xi_n(x,t) = \left[2A\ sen\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\right] cos\ (2\pi f_n t)$$

En el caso de un tubo abierto en los dos extremos, también están presentes todos los múltiplos de la frecuencia fundamental como el caso de la soga atada por los dos extremos, pero manteniendo el 0 en un extremo. Las soluciones posibles van a estar representadas por:

$$\xi_n(x,t) = \left[2A\ cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\right] cos\ (2\pi f_n t)$$

12_ ENERGÍA EN LAS ONDAS ESTACIONARIAS

Hemos dicho que, a diferencia de las ondas mecánicas progresivas en que la energía se transfiere en el medio elástico en cuestión, en las ondas estacionarias la energía "se establece" en el medio. Observamos que la ecuación de las ondas estacionarias se corresponde con un particular movimiento oscilatorio del medio.

¿Cómo hallamos la expresión de la energía? Vamos a contextualizarla para una cuerda, de longitud L, fija en sus dos extremos, pero la expresión será válida para cualquier medio elástico.

Cuando se establece una onda estacionaria en la cuerda, cada elemento de masa se mueve como un oscilador armónico simple. Recordemos que para un MAS la energía total de oscilación la podemos obtener como la energía cinética máxima.

Por lo tanto, si consideramos la elongación de los puntos de una cuerda como:

$$\xi_n(x,t) = 2Asenk_n x.cos\omega_n t$$

La energía cinética la obtenemos partiendo de $v = \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t}$

$$Ec_{MAX} = {}^1\!/_2 .m.v^2 = {}^1\!/_2 .m.[4A^2.\omega^2.sen^2(k_n x)]$$

Recordemos también que para la cuerda: $M = \mu\,\Delta x$

Por lo tanto, una longitud de cuerda Δx tendrá una energía de oscilación:

$$\Delta E = {}^1\!/_2 .\mu.(4A^2).\omega^2 \int_0^L sen^2(kx)dx$$

Como: $sen^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$

$$\Delta E = {}^1\!/_2 .\mu.4A^2.\omega^2 \int_0^L \left[\frac{1-cos2({}^{n\pi x}\!/_L)}{2}\right] dx$$

Integramos:

$$E = {}^1\!/_2 .\mu.(4A^2).\omega^2.{}^L\!/_2$$

$$\boxed{E = \mu.A^2.\omega^2.L}$$

13_ RESONANCIA

Si no intervienen fuerzas externas el movimiento de un oscilador se repite con su frecuencia natural ω aún cuando haya un pequeño amortiguamiento.

Pero en el caso de una oscilación forzada, lograda con una fuerza externa, un sistema oscila aumentando su amplitud en el tiempo. Por ejemplo, las estructuras mecánicas como edificios y puentes, tienen frecuencias naturales propias de oscilación. Si la estructura es alcanzada por una fuerza externa (por ejemplo viento, sismo, etc.), puede oscilar con gran amplitud hasta provocar su rotura. Este fenómeno será más notorio dependiendo de la relación entre la frecuencia impulsora externa y las frecuencias naturales de oscilación del sistema. Cuanto más cerca esté de una de ellas, el sistema oscilará con mayor amplitud.

Para la descripción de este fenómeno intervienen dos conceptos: oscilación forzada (fuerza externa) y el medio que tiene frecuencias naturales propias de oscilación.

Vamos a analizar nuevamente el caso de una cuerda de longitud L atada en uno de sus extremos y en el otro accionado según una función armónica $\xi(t) = A_{MAX}\cos(\omega t)$ de frecuencia f.

En resonancia la amplitud de oscilación de las partículas del medio (A') es la respuesta al forzamiento de la fuente con una amplitud Amax que puede ser distinta de A'.

Como resultado, se establece en la cuerda una onda estacionaria dada por la ecuación:

$$\xi(x,t) = [A' sen\,(kx)]\cos(\omega t)$$

Para x=L

$$\xi(L,t) = [A' sen\,(kL)]\cos(\omega t) = A_{MAX}\cos(\omega t)$$

Despejamos A':

$$A' = \frac{A_{MAX}}{sen\,(kL)}$$

Si reemplazamos este valor de A' en la ecuación anterior y consideramos la primera frecuencia natural de la cuerda fija por sus dos extremos (fundamental) obtenemos:

$$\xi(x,t) = \frac{A_{MAX}\, sen\,(kx)}{sen\,(kL)}\cos(\omega t) = \frac{A_{MAX}\, sen\,(2\pi x/\lambda)}{sen\,(\pi f/f_1)}\cos(\omega t)$$

Observamos que si aumentamos la frecuencia f aplicada y se acerca a f_1, la amplitud de las ondas estacionarias tiende a infinito y decimos que la cuerda se halla en resonancia con la frecuencia aplicada. Esto mismo ocurrirá cada vez que la frecuencia f coincida con una frecuencia propia es decir $f= f_n=nf_1$.

Inicialmente originamos un impulso oscilatorio en uno de sus extremos lo que origina una onda progresiva que se refleja en el otro extremo con salto de π. El movimiento inicial de la cuerda es complejo hasta que se logra (en las condiciones mencionadas) un estado estacionario cuando no se propaga energía en la cuerda y no se suministra energía desde el extremo accionado. *Es cuando decimos que se ha establecido una onda estacionaria en la cuerda.*

14_ EFECTO DOPPLER[9]

(para sonido)

Denominamos efecto Doppler a la variación de frecuencia de ondas sonoras, respecto a la frecuencia emitida por una fuente, percibida por un observador y debida al movimiento relativo entre fuente y observador medida respecto a un cierto medio (usualmente aire en reposo).

Sistema de convención de signos a utilizar: consideramos sentido positivo al sentido que va desde la fuente al observador. Es decir $v_s > 0$

Analicemos distintos casos.

a) Supongamos, en primera instancia, que la fuente y el observador están en reposo respecto al medio.

La fuente F emite a una frecuencia igual a:

$$f = \frac{v_s}{\lambda}$$

$$f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{seg}\right]$$

[9] Se verifica también para ondas electromagnéticas el efecto Doppler, que fue medido como corrimiento hacia el rojo (mayores longitudes de onda) debido a la expansión del universo por el científico Lemaître y luego Hubble.

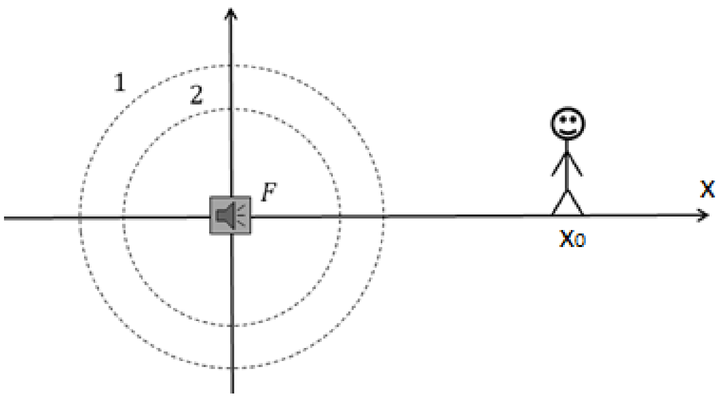

Figura 20

1 y 2 son dos frentes de onda emitidas por F. El 2 fue emitido un período T más tarde que 1. La diferencia entre ambos frentes de onda es λ (longitud de onda). Si "f" es el número de frentes de onda que emite la fuente en 1 segundo, el observador ubicado en x recibirá el mismo número de frentes de onda por unidad de tiempo.

b) Ahora, supongamos que el observador se mueve hacia la fuente. Por lo tanto, va a interceptar más ondas por unidad de tiempo que las percibidas si estuviera quieto.

¿Por qué?

Sabemos, por movimiento relativo:

$$\boxed{\vec{v}_r = \vec{v}_s - \vec{v}_o}$$

Siendo:

$\vec{v}_r$: *velocidad relativa del sonido respecto al observador*

$\vec{v}_s$: *velocidad del sonido medida respecto al medio*

$\vec{v}_o$: *velocidad del observador medida respecto al medio*

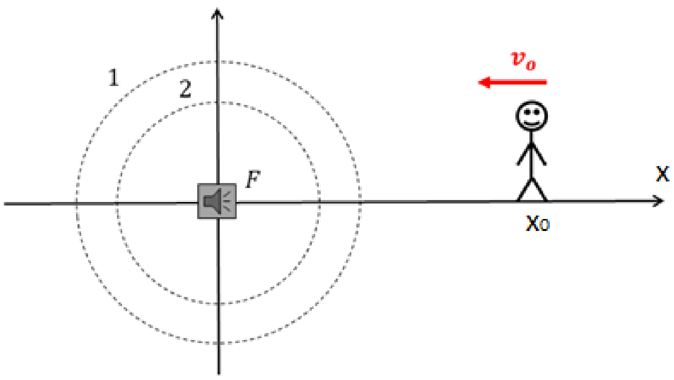

Figura 21

Teniendo en cuenta que la velocidad del hombre es negativa, de acuerdo a la convención utilizada, hacemos los reemplazos correspondientes. Llamamos f' a la frecuencia percibida por el observador en movimiento.

$$f' = \frac{(v_o + v_s)}{\lambda} = f.\left(\frac{v_o + v_s}{v_s}\right)$$

$$f' = f\left(1 + \frac{v_o}{v_s}\right)$$

Observamos que la frecuencia aumenta respecto a la frecuencia percibida si estuviera quieto.

En cambio, si el observador se aleja la frecuencia disminuye:

$$f' = f\left(1 - \frac{v_o}{v_s}\right)$$

c) Ahora consideremos que la fuente se mueve y el observador está en reposo.

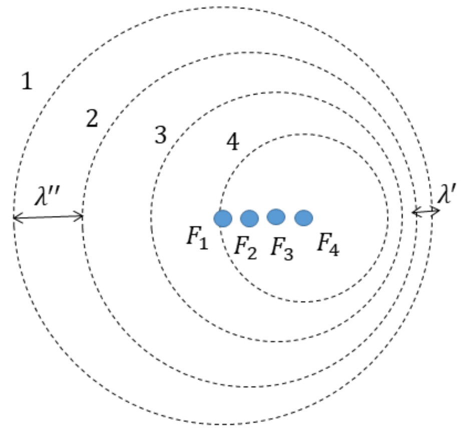

Figura 22

La fuente F_1 emite un frente 1. Si T corresponde al período de la onda emitida, al moverse la fuente con una cierta v_f emite otro frente de ondas en F_2. Luego de otro T en F_3 y así sucesivamente.

La longitud de onda que le llega al observador, por delante de la fuente, es más corta: $\lambda' = \lambda - v_f\, T$

Si el observador estuviera por detrás de la fuente, la longitud de onda observada sería más larga en la misma cantidad $v_f\, T$.

Pero $\lambda = \frac{v_s}{f} = v_s\, T$ es la longitud de onda que hubiera tenido la emisión con fuente en reposo, si hacemos los reemplazos:

$$\lambda' = \frac{v_s}{f'} = \frac{v_s}{f} - \frac{v_F}{f}$$

$$\boxed{f' = f\,\frac{v_s}{v_s - v_F}}$$

Si se aleja del observador

$$\boxed{f' = f\,\frac{v_s}{v_s + v_F}}$$

Y si se mueven ambos (fuente y observador) obtenemos, con la convención de signos adoptada (por lo tanto hay que analizar si v_o y v_F son positivas o negativas).

$$\boxed{f' = f\,\frac{v_s - v_o}{v_s - v_F}}$$

Nota: verificar siempre el signo atribuido a las velocidades, reconociendo cuando la frecuencia debe aumentar y cuando disminuir.

15_ PROBLEMAS RESUELTOS

Un afinador de piano decide que las cuerdas dobles que dan la nota "La" tengan materiales diferentes, tal que tensadas con la misma tensión suenen simultáneamente con batido de 1 [Hz], una de ellas tiene frecuencia 110 [Hz] suena en el primer armónico (se cuenta fundamental y primer armónico) y la densidad lineal de esa cuerda es 0,090 [kg/m], ambas están fijas en ambos extremos. La otra cuerda suena en su modo fundamental. Se desea saber:

a) ¿Qué valores de densidad lineal de esa otra cuerda son los posibles para lograrlo?

b) Realizar esquema de ambos modos de vibración justificando la distancia entre nodos.

a) ¿Qué valores de densidad lineal de esa otra cuerda son los posibles para lograrlo?

Frecuencia de batido: 2 Hz

Longitud de la soga: $\mathrm{L_1 = L_2 = L}$

Dos cuerdas tensadas con la misma tensión: $\mathrm{T_1 = T_2}$

<u>Para la primer cuerda:</u>

La primera de ellas tiene una frecuencia de $f_1 = 110$ Hz, una densidad lineal $\mu_1 = 0{,}09$ kg/m y suena en el primer armónico.

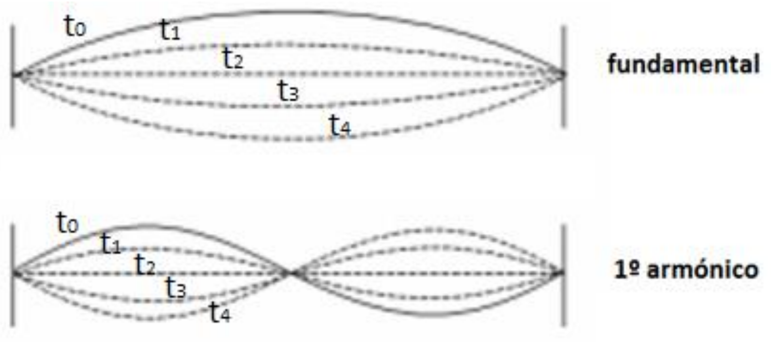

Figura 23

Como vemos en la figura 23, la longitud de onda para el primer armónico es igual a la longitud de la cuerda.

$$L_1 = \lambda_1$$

La velocidad de propagación de la onda es igual a:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}}$$

Despejando la tensión: $T_1 = v_1^2\ \mu_1$

Además la velocidad de propagación se puede escribir como:

$$v_1 = \lambda_1\ f_1 = L_1\ f_1$$

Para la segunda cuerda:

De la segunda cuerda sólo sabemos que suena en su modo fundamental y su densidad lineal es μ_2

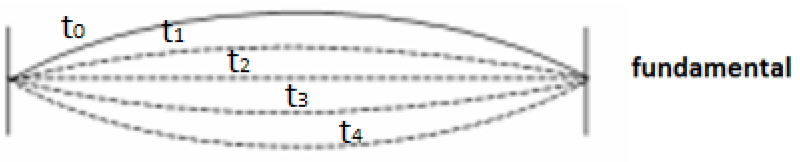

Figura 24

Como vemos en la figura 24, la longitud de onda para el primer armónico es igual a la longitud de la cuerda.

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{2}$$

La velocidad de propagación de la onda es igual a:

$$v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}}$$

Despejando la tensión: $T_2 = v_2^2\ \mu_2$

Además la velocidad de propagación se puede escribir como:

$$v_2 = \lambda_2\ f_2 = 2\ L_2\ f_2$$

Como las cuerdas están tensadas con la misma tensión, resulta que:

$$T_1 = T_2$$

$$v_1^2\ \mu_1 = v_2^2\ \mu_2$$

$$(\lambda_1\ f_1)^2\ \mu_1 = (\lambda_2 f_2)^2\ \mu_2$$

$$\mu_2 = \frac{(\lambda_1\ f_1)^2}{(\lambda_2 f_2)^2}\ \mu_1 = \frac{(L_1\ f_1)^2}{(2L_2 f_2)^2}\ \mu_1 = \frac{(L\ f_1)^2}{(2\ L\ f_2)^2}\ \mu_1 = \frac{L^2 f_1^2}{4\ L^2 f_2^2}\ \mu_1$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2\ \mu_1$$

Por el batido podemos obtener dos valores para f_2

$$f_2 = 109\ \mathrm{Hz}$$

$$f_2 = 111\ \mathrm{Hz}$$

Reemplazando con los datos obtenemos los 2 valores para la densidad lineal de la segunda cuerda.

$\mathbf{f_2 = 109\ Hz:}$

$$\mu_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2\ \mu_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{110}{109}\right)^2\left(0{,}09\,\frac{kg}{m}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu_2 \approx 0,0229\ \frac{kg}{m}}}$$

$\mathbf{f_2 = 111\ Hz:}$

$$\mu_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \mu_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{110}{111}\right)^2 \left(0{,}09\frac{kg}{m}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu_2 \approx 0,0221\ \frac{kg}{m}}}$$

2.- Una locomotora en reposo posee un silbato que emite ondas de 1 m de largo. Si dicha locomotora viaja a 300km/ h y hace sonar el silbato (velocidad del sonido en aire de 340 m/s). Determinar la frecuencia que observa el conductor de un automóvil que viaja en sentido opuesto y detrás del tren, pero con la mitad de la rapidez del mismo.

Fuente o emisor: silbato de la locomotora

Observador: conductor de automóvil

La frecuencia emitida por el silbato es:

$$f_e = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{340\ m/s}{1\ m} = 340\ s^{-1}$$

Llamamos v_e a la velocidad del emisor, v_s a la velocidad del sonido y v_o a la velocidad del observador. Todos datos conocidos.

$$|\vec{v_e}| = 300\ km/h$$

$$|\vec{v_s}| = 340\ m/s$$

$$|\vec{v_o}| = 150\ km/h$$

La convención de signos a utilizar será la mencionada en el presente libro: sentido positivo al sentido que va desde la fuente al observador. Es decir $v_s > 0$

En la fórmula general vamos a reemplazar con los signos correspondientes:

$$f' = f_e \, \frac{v_s - v_o}{v_s + v_F}$$

$$f' = (340 \text{ s}^{-1}) \frac{340 \frac{m}{s} - 41{,}66 \frac{m}{s}}{340 \frac{m}{s} + 83{,}33 \frac{m}{s}} = (340 \text{ s}^{-1})(0{,}7 \text{ m})$$

$$\boxed{\mathbf{f' = 239,6} \text{ s}^{-1}}$$

APÉNDICE

Consideramos amplitud pequeña si se la compara con la longitud de onda, y frecuencia baja. Es decir que las pendientes temporales y espaciales de las soluciones son pequeñas.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Donde:

ξ es una función cualquiera de x y de tiempo.

v es la rapidez de propagación que suponemos constante para el medio material (único) que se considera.

En nuestro caso utilizaremos solamente soluciones armónicas, es decir funciones que se pueden representar mediante senos y cosenos cuyos argumentos son la posición en el eje "x", y el tiempo.

Un experimento complejo se podrá describir mediante combinación lineal de estas funciones armónicas de ondas, es decir cada una de ellas es una onda, por ejemplo:

$$\xi_1 = \xi_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t + \emptyset_1)$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \cos(k_2 x - \omega_2 t + \emptyset_2)$$

$$\xi_3 = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \emptyset_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \emptyset_2)$$

Podemos verificar que esta ecuación, es derivable en espacio y en tiempo, y que además satisface a la ecuación diferencial de las ondas.

$$u_1 = (k_1 x - \omega_1 t + \emptyset_1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\omega_1$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = k_1$$

$$u_2 = (k_2 x - \omega_2 t + \emptyset_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\omega_2$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = k_2$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1}\,(-\omega_1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial {u_1}^2}\frac{\partial u_1}{\partial t}(-\omega_1) = \omega_1^2\,\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial {u_1}^2} \qquad (I)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1}\,k_1$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial {u_1}^2}\frac{\partial u_1}{\partial x}\,k_1 = k_1^2\,\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial {u_1}^2} \qquad (II)$$

$$\therefore (I)\ y\ (II)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}\,\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}\,\frac{1}{k_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}\left(\frac{k_1}{\omega_1}\right)^2 = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2}\left(\frac{k_2}{\omega_2}\right)^2 = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

Donde las constantes son las velocidades de propagación de ambas ondas y están elevadas al cuadrado, es decir que el cociente entre la pulsación y el número de onda resulta ser la velocidad de propagación de la onda armónica, para un medio homogéneo y lineal.

Si suponemos que el medio por donde se propagan las ondas es el mismo para ambas, y considerando que la suma de derivadas es la derivada de la suma:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

$$+$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

$$=$$

$$\frac{\partial^2 (\xi_1+\xi_2)}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 (\xi_1+\xi_2)}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$$

La amplitud resultante dependerá de cómo sean cada una de las amplitudes y el ángulo de desfasaje entre ambas. El ángulo de desfasaje podría depender del tiempo.

Proponemos como resultado de la superposición una ecuación de onda resultante del mismo tipo que las ecuaciones originales.

Física para estudiantes de Ingeniería- Ema E. Aveleyra (coord. y coautora), Jorge Cornejo (coautor), Adrián Ferrini (coautor), María Cristina Menikheim (coautora), Sergio Rossi (coautor), Gonzalo Gómez Toba (edición técnica)/1° edición/Buenos Aires: Facultad de Ingeniería, 2018. Revisada en 2019-2020.

ISBN ("en trámite")

Publicación digital.